

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Απόδειξη, σχολικό βιβλίο σελ. 217.
A2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελ. 141.
A3. Διατύπωση θεωρήματος, σχολικό βιβλίο σελ. 246.

A.4

α	β	γ	δ	ε
Σωστό	Σωστό	Λάθος	Λάθος	Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $g'(x) = -2x + 9$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο τυχαίο σημείο της $M(x_0, g(x_0))$ είναι

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0).$$

Για να διέρχεται η εφαπτομένη από το $A(1, 4)$ πρέπει να ισχύει :

$$4 - g(x_0) = g'(x_0)(1 - x_0) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ ή } x_0 = 2.$$

Άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το σημείο $A(1, 4)$.

Μία στο σημείο $M(0, -5)$ με εξίσωση $y = 9x - 5$ και μία στο σημείο $M'(2, 9)$ με εξίσωση $y = 5x - 1$.

B2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $w(x) = f(x) - g(x) = 3^x + x^2 - 9x + 5, x \in \mathbb{R}$.

Η w είναι παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}$, με $w'(x) = 3^x \ln 3 + 2x - 9, x \in \mathbb{R}$.

Και η w' είναι παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}$, με $w''(x) = 3^x \ln^2 3 + 2 > 0$.

Παρατηρούμε ότι $w(1) = w(2) = 0$.

Θα δείξουμε ότι η $w(x) = 0$ έχει το πολύ 2 ρίζες. Έστω ότι η $w(x) = 0$ έχει 3 ρίζες έστω τις

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3.$$

Τότε επειδή η w είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , είναι και συνεχής.

Ακόμα $w(\rho_1) = w(\rho_2) = w(\rho_3) = 0$ Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle στα διαστήματα των ριζών της η $w'(x) = 0$ θα έχει τουλάχιστον 2 ρίζες.

Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα Rolle στα διαστήματα των ριζών της w'

βρίσκουμε ότι η $w''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα, που είναι άτοπο (αφού $w''(x) > 0$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$). Άρα η $w(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες, οπότε οι C_f, C_g έχουν δύο κοινά σημεία τα $E(1, 3)$ και $Z(2, 9)$.

B3.
$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) + 5f(x) - 2^x}{f(x+1) + f(x) + 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^x - 2^x}{3 \cdot 3^x + 3^x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8 \cdot 3^x - 2^x}{4 \cdot 3^x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8 - \left(\frac{2}{3}\right)^x}{4 + \left(\frac{2}{3}\right)^x} = 2$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x+1)+5f(x)-2^x}{f(x+1)+f(x)+2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^x - 2^x}{3 \cdot 3^x + 3^x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 \cdot 3^x - 2^x}{4 \cdot 3^x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}{4 \left(\frac{3}{2}\right)^x + 1} = -1$$

B4. Είναι $I(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x^2+1}{3^x+1} dx$. Θέτοντας στο $I(\alpha)$ όπου x το $-x$ έχουμε

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{x^2+1}{3^{-x}+1} (-1) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x^2+1}{3^x+1} \cdot 3^x dx. \text{ Τότε}$$

$$I(\alpha) + I(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x^2+1}{3^x+1} dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x^2+1}{3^x+1} \cdot e^3 dx \Leftrightarrow 2I(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(x^2+1)(3^x+1)}{3^x+1} dx \Leftrightarrow 2I(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^2+1) dx \Leftrightarrow$$

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-\alpha}^{\alpha} \Leftrightarrow I(\alpha) = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha^3}{3} + \alpha - \left(-\frac{\alpha^3}{3} - \alpha \right) \right] = \frac{1}{2} \left[2 \left(\frac{\alpha^3}{3} + \alpha \right) \right] = \frac{\alpha^3}{3} + \alpha.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από υπόθεση έχουμε $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ άρα η f είναι «1 – 1» δηλαδή αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f κι αφού η f είναι γνησίως

φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της, τότε $D_{f^{-1}} = f([\alpha, \beta]) = [f(\beta), f(\alpha)] = [f(\beta), \beta]$.

Γ2.α. Η ζητούμενη σχέση γράφεται διαδοχικά:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0 \quad (1)$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx$, θέτουμε $x=f(t)$

- Για $x=f(\alpha) \Leftrightarrow f(t)=f(\alpha) \Leftrightarrow t=\alpha$
- Για $x=f(\beta) \Leftrightarrow f(t)=f(\beta) \Leftrightarrow t=\beta$
- $dx=f'(t)dt$

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(f(t)) f'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} t \cdot f'(t) dt = [t \cdot f(t)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} (t)' \cdot f(t) dt =$$

$$\beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \beta f(\beta) - \alpha \beta - \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \beta f(\beta) - \alpha \beta - \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\beta(f(\beta) - \alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = \alpha$$

β. Η δοσμένη ευθεία γράφεται διαδοχικά: $(\varepsilon_1): y = x + 2016$ με $\lambda_1 = 1$. Έστω ε_2 η εφαπτόμενη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$. Η ε_2 είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = -1$

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

Από Θ. Μ. Τ. έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f'(x_0) = -1$$

Γ3. α. Θεωρούμε συνάρτηση: $h(x) = f(x) - x$, $x \in [\alpha, \beta]$

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- $h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \Leftrightarrow h(\alpha) = \beta - \alpha$
- $h(\beta) = f(\beta) - \beta \Leftrightarrow h(\beta) = \alpha - \beta$

$$\text{Άρα } h(\alpha) \cdot h(\beta) = (\beta - \alpha)(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta)^2 < 0$$

Από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει ότι: $h'(x) = (f(x) - x)' \Rightarrow h'(x) = f'(x) - 1 < 0$ αφού $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Άρα η $h(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$. Επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

β.

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \xi]$ και στο $[\xi, \beta]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, ξ) και στο (ξ, β)

Από το Θ. Μ. Τ. έχουμε ότι:

$$\text{➤ Υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi_1 \in (\alpha, \xi) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(\xi) - f(\alpha)}{\xi - \alpha} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{\xi - \beta}{\xi - \alpha}$$

$$\text{➤ Υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi_2 \in (\xi, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\xi)}{\beta - \xi} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{\alpha - \xi}{\beta - \xi}$$

Τελικά:

$$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \frac{\xi-\beta}{\xi-\alpha} \cdot \frac{\alpha-\xi}{\beta-\xi} = \frac{\cancel{\beta-\xi}}{\cancel{\alpha-\xi}} \cdot \frac{\cancel{\alpha-\xi}}{\cancel{\beta-\xi}} = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει ότι: $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$. Θέτουμε όπου x το e^x . Οπότε παίρνουμε:
 $\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$ (1).

Έτσι από την (1) αν θέσουμε όπου x το $\frac{f(x)}{x}$ έχουμε: $e^{\frac{f(x)}{x}} \geq \frac{f(x)}{x} + 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} - e^{\frac{f(x)}{x}} \leq -1 < 0$.

Επομένως $f'(x) \leq -1 < 0$ (2), συνεπώς η f γνησίως φθίνουσα στο $A = (1, +\infty)$.

Δ2. Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x)}{x}$. Τότε: $(x \cdot h(x))' = h(x) - e^{h(x)} \Leftrightarrow \cancel{h(x)} + xh'(x) = \cancel{h(x)} - e^{h(x)} \Leftrightarrow xh'(x) = -e^{h(x)}$
 $\Leftrightarrow -h'(x)e^{-h(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (e^{-h(x)})' = (\ln x)' \Leftrightarrow e^{-h(x)} = \ln x + c$ (3).

Όμως το $f(e) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(e)}{e} = 0 \Leftrightarrow h(e) = 0$ και άρα από τη σχέση (3) έχουμε: $e^0 = \ln e + c \Leftrightarrow c = 0$.

Τελικά $e^{-h(x)} = \ln x \Leftrightarrow -h(x) = \ln(\ln x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\ln(\ln x) \Leftrightarrow f(x) = -x \cdot \ln(\ln x)$ με $x > 1$.

Επίσης η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (1, +\infty)$ οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x \ln(\ln x)) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x \ln(\ln x)) = (-1) \cdot (-\infty) = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(\ln x)) \stackrel{u=\ln x}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln(u)) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln(\ln x)) \stackrel{u=\ln x}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln(u)) = -\infty$

Δ3.α. Το ζητούμενο εμβαδόν χωρίου δίνεται από τη σχέση:

$$E(\lambda) = \int_{e^2}^{e^\lambda} |f(x) - g(x)| dx.$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = (1, +\infty)$ κι αφού $f(e) = 0$ έχουμε για $x > e \Leftrightarrow f(x) < f(e) = 0$. Οπότε η $f(x)$ είναι αρνητική στο $[e^2, e^\lambda]$.

Για $x > 1$ ισχύει $\ln x > 0$. Οπότε η συνάρτηση g είναι θετική στο διάστημα $[e^2, e^\lambda]$. Συνεπώς:

$$f(x) < g(x) \text{ για κάθε } x \in [e^2, e^\lambda], \text{ οπότε : } E(\lambda) = \int_{e^2}^{e^\lambda} -(f(x) - g(x)) dx = \int_{e^2}^{e^\lambda} g(x) - f(x) dx$$

$$= \int_{e^2}^{e^\lambda} \left[\frac{x}{2 \ln x} + x \ln(\ln x) \right] dx = \int_{e^2}^{e^\lambda} \left[\frac{x^2}{2} (\ln(\ln x))' + \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln(\ln x) \right] dx = \left[\frac{x^2}{2} (\ln(\ln x)) \right]_{e^2}^{e^\lambda}$$

$$= \frac{e^{2\lambda}}{2} (\ln(\ln e^\lambda)) - \frac{e^4}{2} (\ln(\ln e^2)) = \frac{e^{2\lambda}}{2} (\ln \lambda) - \frac{e^4}{2} (\ln 2)$$

Δ3. β. Δίνονται $\lambda(t_0)=3$ και $\lambda'(t)=e^{-6}$. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού δίνεται από τη παράγωγο της συνάρτησης $E(\lambda)=\frac{e^{2\lambda}}{2}(\ln\lambda)-\frac{e^4}{2}(\ln 2)$ όπου το λ είναι συνάρτηση του χρόνου. Έχουμε:

$$E'(\lambda(t))=\left(\frac{e^{2\lambda(t)}}{2}(\ln\lambda(t))-\frac{e^4}{2}(\ln 2)\right)'=\lambda'(t)e^{2\lambda(t)}\ln\lambda(t)+\frac{\lambda'(t)e^{2\lambda(t)}}{2\lambda(t)}=\lambda'(t)\left(e^{2\lambda(t)}\ln\lambda(t)+\frac{e^{2\lambda(t)}}{2\lambda(t)}\right)$$

$$\text{Για } t=t_0 \text{ έχουμε: } E'(3)=e^{-6}\left(e^6\ln 3+\frac{e^6}{6}\right)=\ln 3+\frac{1}{6}.$$

Δ4. Η δοσμένη ανίσωση μετασχηματίζεται ως εξής:

$$f(x^2+7)+x^2+6>f(5x+1)+5x\Leftrightarrow f(x^2+7)+x^2+7>f(5x+1)+5x+1 \quad (4) \text{ και αφού το πεδίο ορισμού}$$

$$\text{της } f \text{ είναι το } A=(1,+\infty) \text{ πρέπει } \begin{cases} x^2+7>1 \\ 5x+1>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>-6 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=f(x)+x$ με $x>1$.

Η συνάρτηση k είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $k'(x)=f'(x)+1\leq 0$ από (2).

Άρα η k είναι γνησίως φθίνουσα στο A . Από την (4) έχουμε:

$$k(x^2+7)>k(5x+1)\stackrel{k\downarrow}{\Leftrightarrow} x^2+7<5x+1\Leftrightarrow x^2-5x+6<0\Leftrightarrow 2<x<3 \text{ και αφού } x>0 \text{ τότε οι λύσεις είναι: } 2<x<3.$$

Μερικές Γενικές Παρατηρήσεις:

- Τα **Σωστά – Λάθος** γράφονται ολογράφως (αλλιώς υπάρχει κίνδυνος να μην βαθμολογηθούν!)
- Οι εφαρμογές του σχολικού βιβλίου θεωρούνται βασικές και αποτελούν πολλές φορές τις κεντρικές ιδέες για θέματα πανελλαδικών εξετάσεων
- Ο καθολικός (\forall) και υπαρξιακός (\exists) ποσοδείκτης δεν αποτελούν σύμβολα της ύλης του σχολικού βιβλίου και **δεν** μπορούν επομένως να χρησιμοποιηθούν
- Οι επεξηγήσεις των βημάτων που εκτελούνται κατά την διαδικασία επίλυσης των θεμάτων (π.χ. πως υπολογίστηκε ένα όριο) είναι εντελώς απαραίτητες
- Η καλή εμφάνιση του γραπτού προκαταβάλλει θετικά τους βαθμολογητές (αρνητικά σε αντίθετη περίπτωση)

Ο ΣΥΛΛΟΓΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΤΟΥ ΓΕΛ ΑΡΧΑΓΓΕΛΟΥ ΣΑΣ ΕΥΧΕΤΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ